CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIŢIA a VIII-a, TULCEA, 1 aprilie 2017

Clasa a VII - a

1. Se consideră trapezul *ABCD* în care $AB \| CD$ şi *E* este mijlocul laturii $[AD]$. Se construieşte trapezul *CEFG* astfel încât $EF \| CG$, iar *B* este mijlocul segmentului $[FG]$. Arătaţi că trapezele *ABCD* şi *CEFG* au arii egale.

2. Se consideră un număr prim *p*, $p \geq 5$, şi numerele $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-3} + \frac{1}{p-2}$.
Arătați că numerele *a* și *b* dau același rest la împărțirea cu *p* .

.

3. a) Arătaţi că există o singură pereche de numere naturale nenule (m,n) care este soluţie a ecuaţiei $2xy + x + y - 60 = 0$.

b) Arătaţi că, oricum am considera la întâmplare 21 de numere naturale nenule mai mici decât 30, există printre acestea un număr *a* pentru care ecuaţia $4xy + 2x + 2y + 1 - a^2 = 0$ are soluţie unică în mulţimea numerelor naturale nenule.

4. Se consideră trapezul *ABCD* în care $AB \| CD$, $m(\widehat{BAD}) = 90^\circ$, iar $BD \cap AC = \{O\}$. Paralela prin *O* la bazele trapezului intersectează segmentele (AD) şi (BC) în punctele *E* şi respectiv *F*. Arătaţi că:

a) $\widehat{BEO} \equiv \widehat{CEO}$;

b) $EF = \frac{2 \cdot AB \cdot DC}{AB + DC} < \frac{2 \cdot EB \cdot EC}{EB + EC}$.

Notă: - Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
- Timp de lucru: 3 ore efectiv.